Μάθημα 11ο

08/12/15

ΑΣΚΗΣΗ: Ε.Α.Τ.Π. $q \curvearrowleft \bigcirc \curvearrowright p$

$$P(Z_i = z) = \begin{cases} p & , z = 1 \\ q & , z = -1 \\ p+q=1 \end{cases}$$

ΑΣΚ 44: $p = 1/3$, $q = 2/3$

Η κατάσταση 2 είναι επαναληπτική παροδική;

Υπόδειξη: $k! \sim k^{k+1/2} e^{-k} \sqrt{2\pi}$

ΛΥΣΗ: Η κατάσταση j είναι παροδική αν-ν $\sum\limits_{n=1} p_{jj}^{(n)}$ συγκλίνει.

Αρκεί να εξετάσω τη σύγκλιση της $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$.

$p_{22}^{(n)} = ?$

$p_{22}^{(2k+1)} = 0$ δεν μπορεί να γυρίσει σε περιττό αριθμό βημάτων εφόσον όχι αναπηδήσεις

$p_{22}^{(2k)} = \binom{2k}{k} p^k \cdot q^k$ (κ δεξιά, υπόλοιπα κ αριστερά)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \overset{n=2k}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} p_{22}^{(2k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k \cdot q^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!\,k!} p^k q^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(n)} \simeq \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(2\kappa)^{2\kappa+1/2} e^{-2\kappa}\sqrt{2\pi}\; p^{\kappa} q^{\kappa}}{\kappa^{\kappa+1/2} e^{-\kappa}\sqrt{2\pi}\, \kappa^{\kappa+1/2} e^{-\kappa}\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{2^{2\kappa}\, 2^{1/2}\, \kappa^{2\kappa+1/2} \cdot p^{\kappa} \cdot q^{\kappa}}{\kappa^{2\kappa+1}\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(4pq)^{\kappa}}{\sqrt{\kappa}\sqrt{\pi}}$$

1η περίπτωση: $4pq<1 \Rightarrow$ συγκλίνει $\Rightarrow$ παροδική.

2η περίπτωση: $\left.\begin{matrix} 4p\cdot q=1 \\ p+q=1 \end{matrix}\right\} p=q=\frac{1}{2}$. , $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1^{\kappa}}{\sqrt{\kappa}\sqrt{\pi}}$ αποκλίνει $\Rightarrow$ επαναληπτική

3η περίπτωση: $4p\cdot q>1$

Για εμάς: $p+q=1 \Rightarrow (p+q)^2=1$

$4pq>1=(p+q)^2 \Rightarrow (p-q)^2<0$ άτοπο.

ΑΣΚΗΣΗ 35 (43, 51)

ταμείο $\rightarrow P(\lambda)$.

Ουρά άπειρης χωρητικότητας

Χρόνος εξυπηρέτησης $b(t)$, $t\geq 0$

$X_n \equiv$ ο αριθμός των πελατών στο ταμείο και στην ουρά (στο σύστημα) αμέσως μετά την εξυπηρέτηση του n-οστού πελάτη.

α) Να παρασταθεί ως Μ.Α. και να βρεθεί ο P.

β) Αν $b(t)=\mu e^{-\mu t}$, $t\geq 0$ να βρεθούν οι πιθανότητες σε κατάσταση στατικής ισορροπίας

43: $\lambda=4$, α) ερώτημα: $\mu=7$

Ποιά η πιθανότητα μετά την ολοκλήρωση οποιουδήποτε ελέγχου σε στατική ισορροπία να $\exists$ άλλα δύο προϊόντα στο σύστημα.

51: $\lambda=5$

α) Να παρασταθεί ως στοχαστική διαδικασία και να βρεθεί ο P όταν ο χρόνος ελέγχου είναι 3, 4 ή 5 μονάδες χρόνου με πιθ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ: $X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + \cancel{A_{n+1}} B, & X_n \geq 1 \\ \cancel{A_{n+1}} B, & X_n = 0 \end{cases}$

Το μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν και όχι από το παρελθόν, άρα έχω μαρκοβιανή

$b_k = P(B=k)$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ & & b_0 & b_1 & \cdots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

$b(t)$ χρόνος εξυπηρέτησης.

Τότε $b_k = P(B=k) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}_{\text{Poisson}(\lambda) \text{ σε 1 χρόνο.}} b(t)\, dt$

$b(t) = \mu e^{-\mu t}$

$$b_k = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu \lambda^k}{(\mu+\lambda)^{k+1}} \overset{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}{=} \frac{\rho^k}{(1+\rho)^{k+1}}$$

ΑΣΚ 51:

$$b_k = P(B=k) = \sum_{i=1}^{3} P(B=k \mid T=t_i)\, P(T=t_i) = \frac{(3\lambda)^k e^{-3\lambda}}{k!} \frac{1}{2} + \frac{(4\lambda)^k e^{-4\lambda}}{k!} \frac{1}{4} + \frac{(5\lambda)^k e^{-5\lambda}}{k!} \frac{1}{4}$$

$t_1 = 3$, $t_2 = 4$, $t_3 = 5$.

Οι πιθανότητες σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας. $(\Pi_0, \Pi_1, \ldots)$

Μη διαχωρίσιμη Μ.Α και απεριοδική, θα εφαρμόσω το αντίστροφο του

Θ. Foster για να εξετάσω πότε είναι θετικώς επαναληπτική, δηλ. εργοδική.
Αρκεί να βρώ ότι υπάρχει λύση του $X = XP$ με όχι όλα τα x_i μηδενικά και $\sum |x_i| < \infty$

$X = XP$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 \rho \\ x_2 &= \rho^2 x_0 \\ x_3 &= \rho^3 x_0 \end{aligned}\right\} \cdots x_k = \rho^k x_0$$

Πότε $\sum x_0 \rho^k < \infty$? όταν $\rho < 1$.

$\Pi = cX = c(1, \rho, \rho^2, \dots)$, όπου c τέτοιο ώστε $\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = 1$.

$c = 1 - \rho$

$\Pi_i = (1-\rho)\rho^i$

ΑΣΚΗΣΗ 4,(7):

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$P_{00}^{(2)}, P_{01}^{(2)}, P_{02}^{(2)}$

$P_{i0}^{(2)}, P_{i1}^{(2)}, P_{i\,i+2}^{(2)}, i = 1, \dots$

f_{00}^*

μ_0

ΛΥΣΗ: Είναι μη διαχωρίσιμη (όλες οι καταστάσεις ίδιου τύπου).

$$P_{00}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \nearrow 0 \longrightarrow 0 \\ \searrow 1 \longrightarrow 0 \end{array}\right) = q \cdot q + p \cdot q = q(q+p) = q$$

$$P_{01}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \nearrow 0 \longrightarrow 1 \\ \searrow 1 \longrightarrow 1 \end{array}\right) = q \cdot p + p \cdot 0 = q \cdot p$$

$$P_{02}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \nearrow 0 \longrightarrow 2 \times \\ \searrow 1 \longrightarrow 2 \end{array}\right) = p \cdot p = p^2$$

$$P_{i0}^{(2)} = P\left(i \begin{array}{l} \nearrow 0 \to 0 \\ \searrow i+1 \to 0 \end{array} \right) = q\cdot q + p\cdot q = q(p+q) = q$$

$$P_{i1}^{(2)} = P\left(i \begin{array}{l} \nearrow 0 \to 1 \\ \searrow i+1 \to 1 \ \times \end{array} \right) = q\cdot p$$

$$P_{i\,i+2}^{(2)} = P\left(i \begin{array}{l} \nearrow 0 \cancel{\to} i+2 \\ \searrow i+1 \to i+2 \end{array} \right) = p\cdot p = p^2$$

ΑΣΚ 7:

$$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}$$

$$f_{00}^{(1)} = P(0 \to 0) = q$$

$$f_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = p\cdot q$$

$$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = p^2\cdot q$$

$$f_{00}^{(n)} = p^{n-1}\cdot q \quad , n = 1, 2, \ldots$$

$$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} q = q \cdot \frac{1}{1-p} = q \cdot \frac{1}{q} = 1.$$

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} \cdot q = q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = q \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{q}$$

$$\boxed{\sum n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6: Έστω X_n αριθμός επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli

X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Πίνακας μεταβασης P_j , $P_{ij}^{(n)}$

ΛΥΣΗ: Η X_n είναι Μ.Α.

Πίνακας μεταβασης :

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ \hline 0 & q & p & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & q & p & 0 & 0 & \ldots \\ 2 & 0 & 0 & q & p & 0 & \ldots \\ 3 & 0 & 0 & 0 & q & p & \ldots \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

$q = P(\text{αποτυχίας}) = 1 - p$

$p = P(\text{επιτυχίας}) = 1 - q$

$p_{ij}^{(n)} = P\Big($από το i να πάω στο j σε n-βήματα$\Big) =$

$= P($οι i επιτυχίες να γίνουν j μετά από n δοκιμές$) =$

$$= \begin{cases} 0 & , i > j \\ \dfrac{n}{j-1} p^{j-i} q^{j-i} & , i \leq j \end{cases}$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

Εστω X_n η κατάσταση καιρού τη n-οστή μέρα.

$0 =$ Βροχερή

$1 =$ Διαφορετικά

$$P = \begin{array}{cc} 1-a & a \\ \end{array}$$
$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} b & 1-b \end{array}$$

$\boxed{1^η}$ ... $\boxed{6^η} \rightarrow$ όχι βροχή πιθανότητα την $6^η$ μέρα να μην είναι βροχερός δεδομένου ότι την $1^η$ δεν ήταν βροχερός.

ΟΧΙ ΒΡΟΧΗ

Ισοπίθανες καταστάσεις.

ΛΥΣΗ:

$p_{11}^{(5)}$.

$p_1^{(5)}$

Εστω $p^{(n)} = \big(P(X_n=0) \; P(X_n=1)\big) = \big(p_0^{(n)} \; p_1^{(n)}\big)$

Ισχύει
$$\left.\begin{aligned} p_0^{(n)} &= p_0^{(n-1)}(1-a) + p_1^{(n-1)} b. \\ p_1^{(n)} &= p_0^{(n-1)} \cdot a + p_1^{(n-1)}(1-b) \end{aligned}\right\}$$

$$p^{(n)} = \big(p_0^{(n)} \; p_1^{(n)}\big) = \big(p_0^{(n-1)} \; p_1^{(n-1)}\big) \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

$p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P = \dots = p^{(0)} \cdot P^n$ ✳

$$\left.\begin{aligned} p_0^{(n)} &= p_0^{(0)} \cdot p_{00}^{(n)} + p_1^{(0)} p_{10}^{(n)} \\ p_1^{(n)} &= p_0^{(0)} \cdot p_{01}^{(n)} + p_1^{(0)} \cdot p_{11}^{(n)} \end{aligned}\right]$$

$$\big(p_0^{(n)} \; p_1^{(n)}\big) = \big(p_0^{(0)} \; p_1^{(0)}\big) \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{pmatrix}$$ ✳

$1 \quad 1-a-b, \; a+b \neq 0$

Συμπεραίνουμε από ⊛ ότι $P^n = \begin{pmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{pmatrix}$, $P^n = Q \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} Q^{-1}$

Ισχύει ότι $P^{(n)} = P^{(0)} \cdot P^n \quad P^n$

$(P_0^{(n)} \;\; P_1^{(n)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

$P_1^{(n)} = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} w$

ΑΣΚΗΣΗ 24 (40):

0 = Χιόνι

1 = Καθαρή

Αν μια χιονισμένη μέρα διαδέχεται μια καθαρή, με πιθανότητα 0.25, ενώ μια καθαρή διαδέχεται μια χιονισμένη με πιθανότητα 0.335.
Να βρεθεί η πιθανότητα ένα αυτοκίνητο να χρειαστεί αλυσίδες στις 28 Δεκεμβρίου να είναι χιόνι, αν στις 25 είχε χιόνι.
Ποιό το μέσο μήκος χιονισμένης περιόδου;

ΛΥΣΗ:

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a=0.335 \\ 1 & 0.25=b & 1-b \end{array}$$

$P(\text{ΚΑΘ} \to \text{ΧΙΟΝΙ}) = 0.25$

$P(\text{ΧΙΟΝΙ} \to \text{ΚΑΘ}) = 0.335$

$P_{00}^{(3)}$ (όπως στην προηγούμενη άσκηση)

Χιονισμένη περίοδος μήκους n

$\boxed{\text{ΧΙΟΝΙ}}$ $\boxed{\text{ΧΙΟΝΙ n μέρες}}$ $\boxed{\text{ΚΑΘΑΡΗ}}$

Έστω T η τ.μ. που παριστάνει το μήκος μιας χιονισμένης περιόδου

Δυνατές τιμές: 1, 2, 3, 4, ... → διακριτή.

$P(T=1) = (1-a) \cdot a$

$P(T=2) = (1-a)^2 a$

$P(T=t) = (1-a)^t \cdot a$

$$ET = \sum_{t=1}^{\infty} t P(T=t) = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot (1-a)^t \cdot a = a \cdot (1-a) \cdot \sum t (1-a)^{t-1}$$

$$= a \cdot (1-a) \cdot \frac{1}{(1-(1-a)^2)} = \frac{1-a}{a}$$

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$